

Hong Kong Mathematics Olympiad (2016/17)

Heat Event (Individual)

香港数学竞赛 (2016/17)

初赛项目(个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

甲部

Part A

1. 已知 $A2017B$ 是一个六位数，且可被 72 整除，求 A 的值。

Given that $A2017B$ is a 6-digit number which is divisible by 72, find the value of A .

2. 已知 $0 \leq p \leq 1$ ，求 $Q = 3p^2(1-p) + 6p(1-p)^2 + 3(1-p)^3$ 的最大值。

Given that $0 \leq p \leq 1$, find the greatest value of $Q = 3p^2(1-p) + 6p(1-p)^2 + 3(1-p)^3$.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的三条边的长是 a 、 b 和 c ，其中 $3 \leq a \leq 5 \leq b \leq 12 \leq c \leq 15$ ，求当 $\triangle ABC$ 的面积最大时，它的周界是多少。

Given that the three sides of $\triangle ABC$ are of length a , b and c , where $3 \leq a \leq 5 \leq b \leq 12 \leq c \leq 15$, find the perimeter of $\triangle ABC$ when its area attains the maximum value.

4. 设 B 及 C 为正整数。求 C 的最小值使得 $B^2 = C + 134$ 。

Let B and C be positive integers. Find the least value of C satisfying $B^2 = C + 134$.

5. 若把一组自然数之和 $1 + 2 + 3 + \cdots + 2015 + 2016 + 2017$ 除以 9，余数是什么？

Determine the remainder when the sum of natural numbers $1 + 2 + 3 + \cdots + 2015 + 2016 + 2017$ is divided by 9.

6. 已知 $a_0 = 2$ ， $a_1 = -1$ 及 $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ ，其中 $n \geq 1$ ，求 a_{2017} 的值。

Given that $a_0 = 2$, $a_1 = -1$ and $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, where $n \geq 1$, determine the value of a_{2017} .

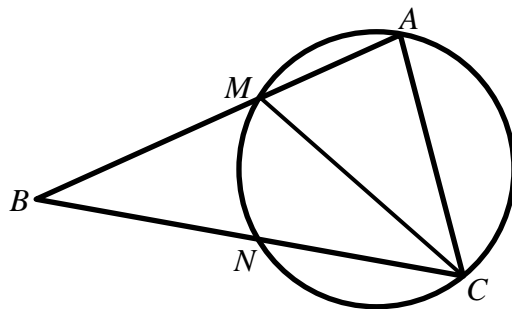
7. 设 N 为完全立方数。已知 $N = 161x + 23y$ ，其中 x 和 y 均为正整数。求 $x + y$ 的最小值。
Let N be a perfect cube number. Given that $N = 161x + 23y$, where x and y are positive integers, find the minimum value of $x + y$.

8. 已知 $\textcircled{2} = 1 \times 2 \times 3 \times 4$, $\textcircled{3} = 2 \times 3 \times 4 \times 5$, $\textcircled{4} = 3 \times 4 \times 5 \times 6$, ... 及 $\frac{1}{\textcircled{15}} - \frac{1}{\textcircled{17}} = \frac{1}{\textcircled{17}} \times A$, 求 A 的值。
Given that $\textcircled{2} = 1 \times 2 \times 3 \times 4$, $\textcircled{3} = 2 \times 3 \times 4 \times 5$, $\textcircled{4} = 3 \times 4 \times 5 \times 6$, ... and $\frac{1}{\textcircled{15}} - \frac{1}{\textcircled{17}} = \frac{1}{\textcircled{17}} \times A$, find the value of A .

9. 已知 $\sin x \cdot \cos x = 0$ 及 $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ ，其中 $90^\circ \leq x < 180^\circ$ ，求 x 的值。
Given that $\sin x \cdot \cos x = 0$ and $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$, where $90^\circ \leq x < 180^\circ$, find the value of x .

10. 如图一， CM 是 $\angle ACB$ 的角平分线，且 $AB = 2AC$ 。已知 $\triangle AMC$ 的外接圆与 BC 相交于 N 。若 $BN = 10$ ，求 AM 的长度。

In Figure 1, CM is the angle bisector of $\angle ACB$ and $AB = 2AC$. Given that the circumscribed circle of $\triangle AMC$ intersects BC at N . If $BN = 10$, find the length of AM .



图一
Figure 1

乙部

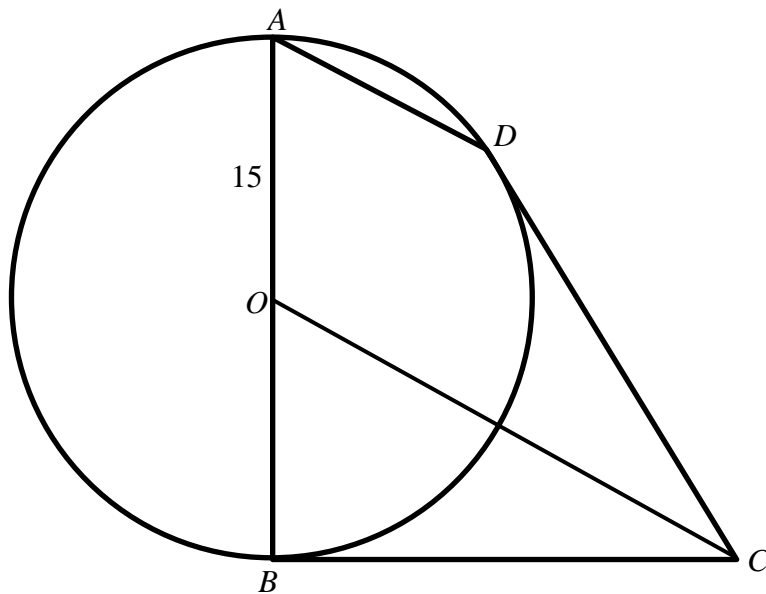
Part B

11. 已知 x 为一实数，求 $\sqrt{x(x+3)(x+6)(x+9)+2017}$ 的最小值。
Given that x is a real number, find the least value of $\sqrt{x(x+3)(x+6)(x+9)+2017}$.

12. 已知 $\frac{x}{x^2 - 5x + 1} = \frac{1}{2}$ ，求 $\frac{x^2}{x^4 - 5x^2 + 1}$ 的值。
Given that $\frac{x}{x^2 - 5x + 1} = \frac{1}{2}$, find the value of $\frac{x^2}{x^4 - 5x^2 + 1}$.

13. 如图二， O 是圆 ADB 的圆心。 BC 及 CD 分别是圆 ADB 在点 B 及 D 的切线， $OC \parallel AD$ ， $OA = 15$ 。若 $AD + OC = 43$ ，求 CD 的长。

As shown in Figure 2, O is the centre of the circle ADB . BC and CD are tangents to the circle ADB at points B and D respectively. $OC \parallel AD$, $OA = 15$. If $AD + OC = 43$, find the length of CD .



图二

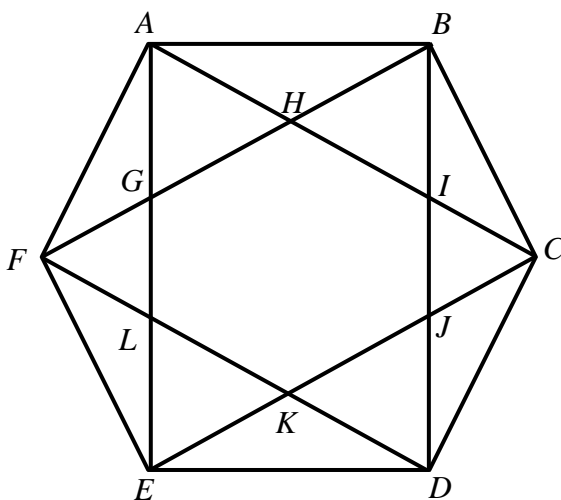
Figure 2

14. 若 $a + \log_2 b = a^2 + \log_2 b^3 - 10 = 3$ ，其中 $b > 1$ ，求 b 的值。

If $a + \log_2 b = a^2 + \log_2 b^3 - 10 = 3$, where $b > 1$, find the value of b .

15. 在图三中，已知 $ABCDEF$ 是一个正六边形，且它的面积是 $90\sqrt{3}$ ，求 GJ 的值。

In Figure 3, given that $ABCDEF$ is a regular hexagon and its area is $90\sqrt{3}$, find the length of GJ .



图三

Figure 3

完

END